9/11/2018

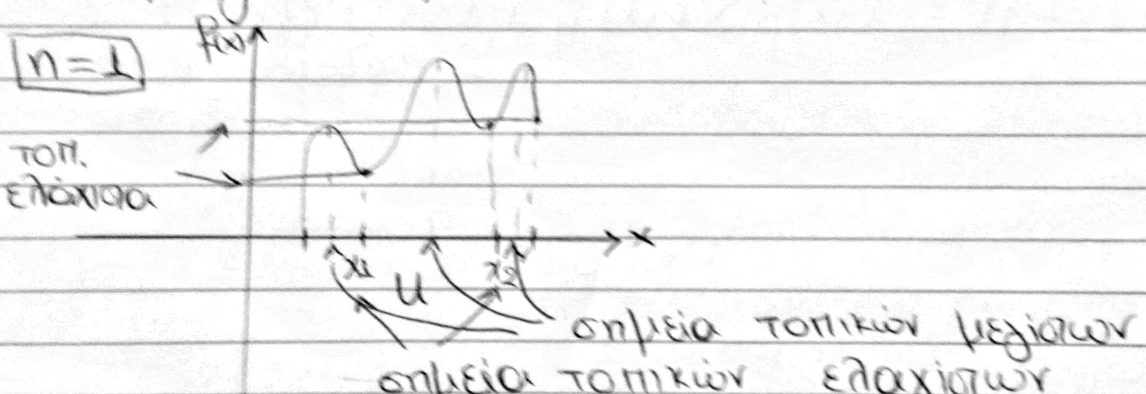
Τοπικά και ολικά ακρότατα.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ (όχι απαραίτητα ανοικτό!). Η $f: U \to \mathbb{R}$ έχει στο $\bar{x} \in U$

(α) · <u>τοπικό ελάχιστο</u>, αν $\exists\ \varepsilon > 0\ \forall \bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U$

$f(\bar{y}) \geq f(\bar{x})$

$\boxed{n=1}$



· <u>τοπικό μέγιστο</u>, αν $\exists\ \varepsilon > 0\ \forall \bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U$

$f(\bar{y}) \leq f(\bar{x})$

(β) · <u>γνήσιο τοπικό ελάχιστο</u>: $\exists\ \varepsilon > 0\ \forall \bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\}$

$f(\bar{y}) > f(\bar{x})$

· γνήσιο τοπικό μέγιστο: $\exists\ \varepsilon > 0\ \forall \bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\}$

$f(\bar{y}) < f(\bar{x})$

(γ) (ολικό) ελάχιστο: $\forall \bar{y} \in U\ f(\bar{y}) \geq f(\bar{x})$

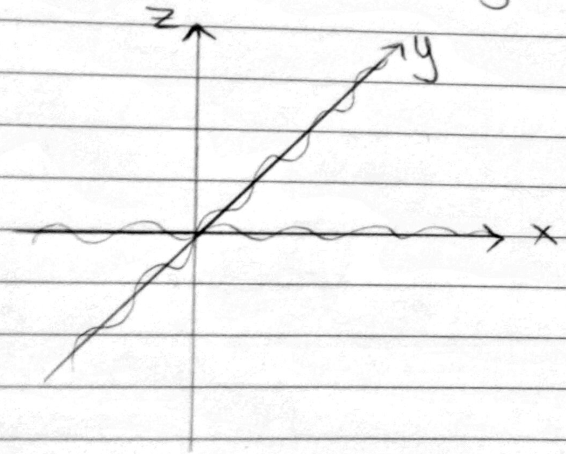
(ολικό) μέγιστο : $\forall \bar{y} \in U : f(\bar{y}) \leq f(\bar{x})$

(γνήσιο) (ολικό) ελάχιστο : $\forall \bar{y} \in U \setminus \{\bar{x}\}$ $f(\bar{y}) > f(\bar{x})$
(γνήσιο) (ολικό) μέγιστο : $\forall \bar{y} \in U \setminus \{\bar{x}\}$ $f(\bar{y}) < f(\bar{x})$

- Τα μέγιστα και τα ελάχιστα ονομάζονται ακρότατα.

<u>Παρατήρηση</u> : (α) Ένα ακρότατο μπορεί να «λαμβάνεται» σε ένα ή περισσότερα σημεία (του πεδίου ορισμού)

$f(x,y) = (\sin x) \sin y$



(β) Δεν έχει απαραίτητα κάθε συνάρτηση ακρότατο.

(γ) Υπενθύμιση (SUPER-SOS) Αν $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές, και $f : U \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε $\exists$ μέγιστο και ελάχιστο

Θεώρημα (Αναγκαία συνθήκη τοπικού ακρότατου)
Έστω <u>$U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό</u> και $f : U \to \mathbb{R}$ μερικώς διαφορίσιμη και $\bar{x} \in U$ να είναι σημείο τοπικού ακρότατου. Τότε $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$

<u>Απόδειξη</u>
Θεωρώ την $g_i(t) = f(\bar{x} + t e_i)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$
$B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$

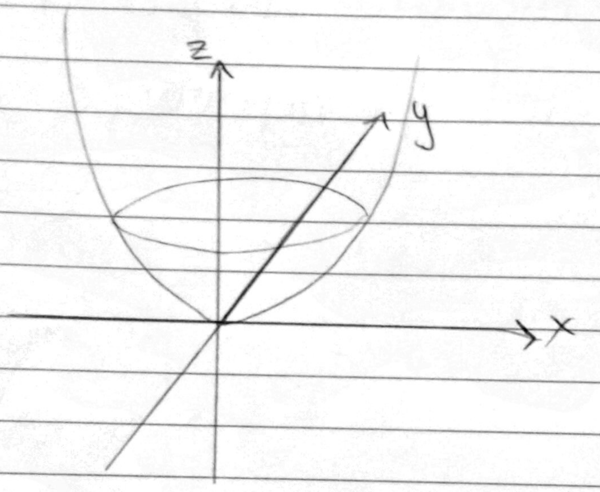
$$\Longrightarrow g_i'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g_i(h)-g_i(0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+he_i)-f(\bar{x})}{h} \overset{\text{ορ.}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$$

και αφού η $g_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$

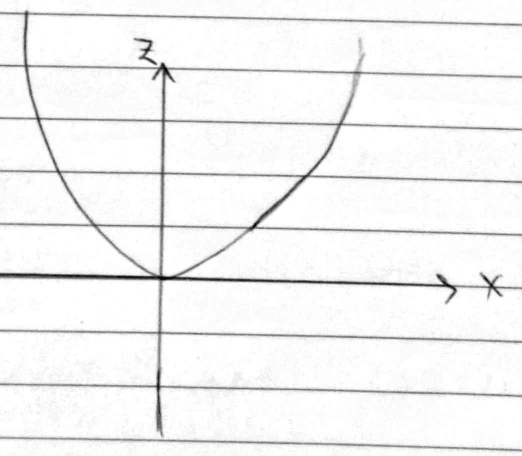
έχει στο $t=0$ τοπικό ακρότατο, θα ισχύει $g_i'(0) = 0$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$$



$g_1(t) = f(0+t,0) = t^2$

$\boxed{y=0}$



<u>Άρα</u> $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό,

$\exists\ \nabla f : U \to \mathbb{R}^n$ $(f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n)$ και

$\bar{x} \in U$ σημείο τοπικού ακρότατου $\Longrightarrow \nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$

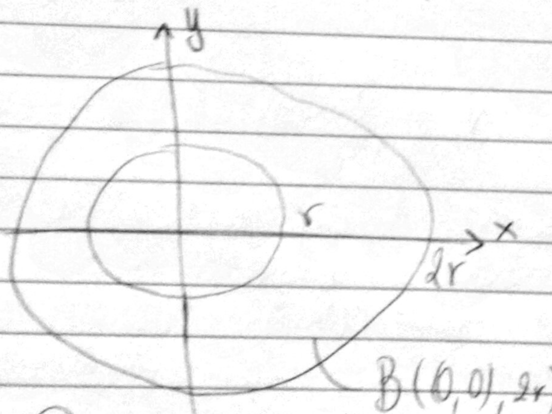
Ειδικότερα, αν έχουμε π.χ. μία συνάρτηση διαφορίσιμη σε ένα ανοικτό υποσύνολο του πεδίου ορισμού (π.χ. στο εσωτερικό του), τότε η συνάρτηση θα έχει ακρότατα το πολύ σε σημεία

$\longrightarrow$ υποψήφια τοπικά ακρότατα.

SOS ΘΕΜΑ 1

π.χ. $f(x,y) = x^2+y^2$ $f: U \to \mathbb{R}$ με $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| = r\}$, $r>0$. Βρείτε τα τοπικά και ολικά ακρότατα.

Λύση Το U είναι φραγμένο και κλειστό στον $\mathbb{R}^2$ άρα συμπαγές $[\,U \subset B((0,0), 2r) \Rightarrow U$ φρ. και, αν $\underbrace{(x_\nu, y_\nu)}_{\in U} \to \underset{\in \mathbb{R}^2}{(x_0,y_0)}$



$\Longleftrightarrow \underbrace{x_\nu^2+y_\nu^2}=r^2$

$\to x_0^2+y_0^2$ $\Longrightarrow x_0^2+y_0^2 = r^2$

$\Longrightarrow (x_0,y_0) \in U\,]$

$\tilde{f}(x,y) = x^2+y^2 \Longrightarrow \tilde{f}$ συνεχής στο $\mathbb{R}^2$ $\Longrightarrow f$ συνεχής $= \tilde{f}|_U$

$\exists$ μέγιστο και ελάχιστο

Όμως $\forall (x,y) \in U$: $f(x,y)$

Άρα, η $f: U \to \mathbb{R}$ είναι σταθερή $\Rightarrow$ όλα τα $(x,y) \in U$, είναι, σημεία και ολικού ελαχίστου και ολικού μεγίστου (όχι γνήσια).

ΘΕΜΑ 2

- $f: V \to \mathbb{R}^2$ $f(x,y) = x^2+y^2$

$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq r^2\}$ $r>0$

Βρείτε τοπικά και ολικά ακρότατα.

Λύση V συμπαγές $V \subset B((0,0), 2r)$ και

$\underbrace{(x_\nu, y_\nu)}_{\in V} \longrightarrow (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$\Longleftrightarrow x_\nu^2 + y_\nu^2 \leq r^2 = c$ $\underset{\text{Θ. Ισοσυγκλ.}}{\Longrightarrow}$ $0 \leq x_0^2 + y_0^2 \leq r^2 \Longrightarrow$

$\longrightarrow x_0^2 + y_0^2$

$(x_0, y_0) \in V$]

Άρα, $f : V \to \mathbb{R}$, V συμπαγές f συνεχής

Επίσης, γνωρίζουμε από Θεώρ. 1 ότι στο

$\partial V = U$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| = r^2\}$ η f έχει την

σταθερή τιμή r^2.

μένει να εξετάσουμε το $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; x^2+y^2 < r^2\}$

το οποίο είναι ανοικτό. Άρα μπορώ να εφαρμόσω την αναγκαία συνθήκη:

$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) = (0,0) \Longrightarrow (x,y) = (0,0)$

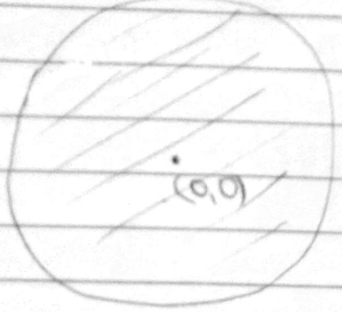
$\Longrightarrow$ το $(0,0) \in V - \text{int}V$ είναι <u>υποψήφιο</u> σημείο ακροτάτου.

Παρατηρούμε ότι $\underbrace{f(0,0)}_{\in V} = 0$, ότι $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = x^2+y^2 \geq 0 \Longrightarrow \forall (x,y) \in V$ $f(x,y) = x^2+y^2 \geq 0$

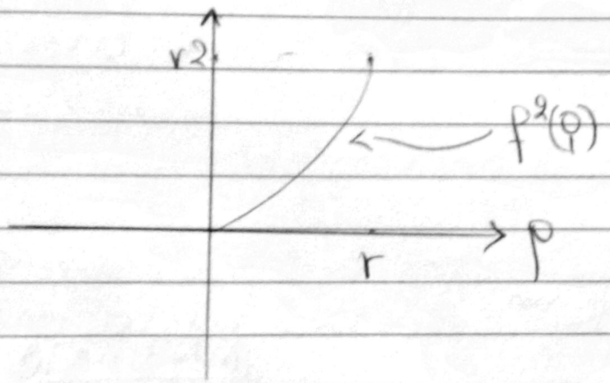
και για $(x,y) \neq (0,0)$ έχουμε $f(x,y) = x^2+y^2 > 0$

$\Longrightarrow$ στο $(0,0)$ έχουμε σημείο ολικού (και τοπικού) ελαχίστου και στο V δεν έχουμε άλλα ακρότατα



ενώ στο ∂V έχουμε ολικό και τοπικό μέγιστο της $f: V \to \mathbb{R}$ (αλλά όχι γνήσιο)

<u>Σημείωση</u> : Η $\tilde{f}: [0, r] \to \mathbb{R}$ με $\tilde{f}(\varrho) = \varrho^2$ (όπου $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$) είναι η :



<u>Θεώρημα</u>: (Ικανή συνθήκη τοπικού ακροτάτου)

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f: U \to \mathbb{R}$ C^2 [δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη $\iff \exists\, f, \frac{\partial f}{\partial x_i}, \dots \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

$U \to \mathbb{R}$ $i,j = 1, \dots, n$ και είναι συνεχείς] και $\bar{x} \in U$ με $\operatorname{grad} f(\bar{x}) = \bar{0}$.

Τότε : (α) $Hf(\bar{x})$ είναι θετικά ορισμένος (ή οριστικά) $\Longrightarrow$ η f έχει στο $\bar{x}$ γνήσιο τοπικό ελάχιστο

(β) $Hf(\bar{x})$ είναι αρνητικά ορισμένος $\Longrightarrow$ η f έχει στο $\bar{x}$ γνήσιο τοπικό μέγιστο

(γ) $Hf(\bar{x})$ είναι μη ορισμένος $\Longrightarrow$ η f δεν έχει τοπ. ακρότατο, αλλά σαγματικό σημείο.

$$Hf(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \end{pmatrix}$$

Θετικά ορισμένος $\Longleftrightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές ιδιοτιμές

αρνητικά ορισμένος $\Longleftrightarrow$ « « « « αρνητικές ιδιοτιμές

μη ορισμένος $\Longleftrightarrow$ έχει και θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές.

Παρατήρηση:

(α) Ένας πίνακας $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ λέγεται θετικά ορισμένος $\boxed{\text{ΑΡΝΗΤΙΚΑ}}$ (*) αν $(\eta_1, \dots, \eta_n) H \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \underset{\boxed{<}^{*}}{>} 0 \quad \forall \bar{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n) \neq \bar{0}$

και θετικά ημιορισμένος, αν $\bar{\eta}^T H \bar{\eta} \geq 0 \ \forall \bar{\eta} \in \mathbb{R}^n$

π.χ. ο μοναδιαίος πίνακας $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος αφού αφενός οι ιδιοτιμές είναι όλες θετικές και αφετέρου $\bar{\eta}^T \cdot I \bar{\eta} = \bar{\eta} \cdot \bar{\eta} = \|\bar{\eta}\|^2 > 0 \quad \forall \bar{\eta} \neq \bar{0}$

ο πίνακας $-I = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$ είναι αρνητικά ορισμένος. $\bar{\eta}^T(-I)\bar{\eta} = -\bar{\eta} \cdot \bar{\eta} = -\|\bar{\eta}\|^2 < 0 \ \forall \bar{\eta} \neq \bar{0}$

και ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$ είναι μη ορισμένος

Ιδέα της απόδειξης (πολύ σχηματικά)

Θ. Taylor $f(\bar{x}+\bar{\eta}) = f(\bar{x}) + \text{grad} f(\bar{x}) \cdot \bar{\eta} + \frac{1}{2} \bar{\eta}^T Hf(\bar{x}) \cdot \bar{\eta}$

$+ \quad o(\|\bar{\eta}\|^2)$ για $\bar{\eta} \to \bar{0}$

$$\Longrightarrow f(\bar{x}+\bar{\eta}) - f(\bar{x}) = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\bar{\eta}^T Hf(\bar{x})\cdot\bar{\eta}}_{>0 \text{ για } \bar{\eta}\neq\bar{0}} + o(\|\bar{\eta}\|^2)}$$

$$\sim \underset{>0}{a}\cdot\|\bar{\eta}\|^2 + \varphi(\eta) \text{ με}$$

$$\frac{\varphi(\bar{\eta})}{\|\bar{\eta}\|^2} \to 0$$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ 3}}$ $f(x,y) = x^2+y^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

μελετήστε για ακρότατα

Λύση $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ $\mathbb{R}^2$ ανοικτό

$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) = (0,0) \Longrightarrow (x,y) = (0,0)$

$\Longrightarrow$ υποψήφιο σημείο τοπ. ακροτάτου

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \nabla(2x) \\ \nabla(2y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) \\ \nabla\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ θετικά ορισμένος $\Longrightarrow$

στο $(0,0)$ το ένα και μοναδικό ακρότατο το οποίο είναι γνήσιο ολικό ελάχιστο.

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ 4}}$ $f(x,y) = x+y$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\mathbb{R}^2$ ανοικτό

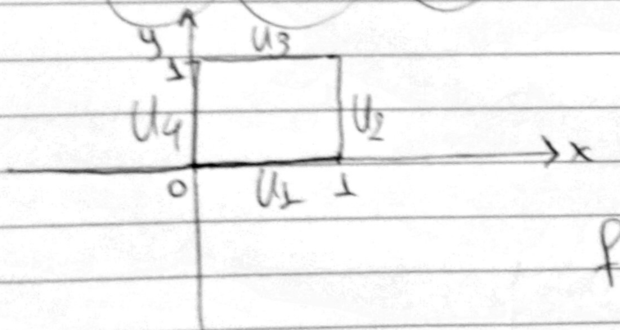
$\nabla f(x,y) = (1,1) \neq (0,0)$ $\forall\, (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ 5}}$ $f(x,y) = x+y \quad (x,y) \in [0,1]^2$

Λύση $\nabla f(x,y) = (1,1) \Longrightarrow \nexists$ τοπικά ακρότατα στο $\mathring{U} = (0,1)\times(0,1)$

Από την άλλη $f: U \to \mathbb{R}$ συνεχής και U συμπαγές $\Longrightarrow \exists$ ακρότατα στο $U \xrightarrow{(*)}$ τα ακρότατα θα βρίσκονται στο $\partial U = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4$

$(x_\nu, y_\nu) \longrightarrow (x_0, y_0)$
$\in U$
$\Longleftrightarrow 0 \le x_\nu \le 1 \wedge 0 \le y_\nu \le 1$
$\xRightarrow[y_\nu \to y_0]{}$ $x_\nu \to x_0$



στο U_1 $f(x,0) = x, \; x \in [0,1]$

$f(0,0) = 0$ στο $f(1,0) = 1$

U_2 $f(1,y) = 1+y, \; y \in [0,1]$

$f(1,0) = 1, \; f(1,1) = 2$

U_3 $f(x,1) = x+1, \; x \in [0,1], \; f(0,1) = 1, \; f(1,1) = 2$

U_4 . . . .

$\Longrightarrow$ Τα μοναδικά ακρότατα είναι στο $(1,1)$ ολικό μέγιστο το $f(1,1) = 2$ και στο $(0,0)$ το $f(0,0) = 0$ ολικό ελάχιστο.

Γιατί στο $(0,0)$ το $f(0,0) = 0$ είναι ελάχιστο στο $[0,1]\times[0,1]$ για την $f(x,y) = x+y$

[Επειδή $f(0,0) = 0$ (και αρνητικές τιμές δεν παίρνει η f) και $\forall \, (x,y) \in [0,1]\times[0,1] \setminus \{(0,0)\}$:

$f(x,y) = x+y > 0$] Άρα $(0,0)$ γνήσιο και ολικό σταθεροποιημένο. Αντίστοιχα, για το $(1,1)$ $f(1,1)=2$

και $f(x,y)=x+y = 2+\underbrace{(x-1)}_{\leq 0}+\underbrace{(y-1)}_{\leq 0}$